

# DISTANCES INVARIANTES ET POINTS FIXES D'APPLICATIONS HOLOMORPHES

JEAN-PIERRE VIGUÉ

**ABSTRACT.** In this paper, we prove the following result : let  $X$  be a complex manifold, hyperbolic for the Carathéodory distance and let  $U$  be an open set relatively compact in  $X$ . Then, there exists  $k < 1$  such that we get, for the Carathéodory infinitesimal metric  $E_X(x, v) \leq kE_U(x, v)$ . We also get results concerning fixed points of holomorphic mappings from  $X$  to  $U$ .

**RÉSUMÉ.** Dans cet article, nous montrons le résultat suivant : Soit  $X$  une variété complexe hyperbolique pour la distance de Carathéodory et soit  $U$  un ouvert relativement compact dans  $X$ . Alors, il existe  $k < 1$  tel que, pour la métrique infinitésimale de Carathéodory, on ait  $E_X(x, v) \leq kE_U(x, v)$ . Nous obtenons aussi des résultats sur les points fixes d'applications holomorphes de  $X$  dans  $U$ .

**Mathematics subject classification** (2010) 32F45, 32H02.

## 1. INTRODUCTION

Un certain nombre d'auteurs ont considéré le problème suivant : soit  $X$  une variété analytique complexe munie d'une distance invariante  $d_X$ . Soit  $U$  un ouvert relativement compact dans  $X$ . Existe-t-il une constante  $k < 1$  telle que, pour tout  $x \in U$ , pour tout  $y \in U$ , on ait

$$d_X(x, y) \leq kd_U(x, y).$$

Si c'est le cas, on en déduit que, pour toute application holomorphe  $f : X \longrightarrow X$  telle que  $f(X)$  soit relativement compact dans  $X$ ,  $f$  admet un point fixe unique  $a \in X$ , et  $a = \lim f^n(x_0)$ , où  $x_0$  est un point quelconque de  $X$ .

Sur cette question, on peut citer en particulier les deux résultats suivants :

- H. Reiffen [6] annonce ce résultat dans le cas d'un espace analytique complexe  $X$   $c_X^i$ -hyperbolique (ce qui signifie que la pseudodistance intégrée de Carathéodory  $c_X^i$  est une distance sur  $X$ ).

- C. Earle et R. Hamilton [1] montrent ce résultat dans le cas d'un domaine borné  $X$  d'un espace de Banach complexe et d'un ouvert  $U \subset X$  complètement intérieur à  $X$ , ce qui signifie que la distance de  $U$  à la frontière de  $X$  est strictement positive. Dans le cas de la dimension finie, ceci signifie seulement que  $U$  est relativement compact dans  $X$ .

Il nous faut aussi signaler un résultat de M. Hervé [3], p. 92 sur les points fixes d'applications holomorphes, résultat obtenu sans utiliser les distances invariantes : soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}^n$  et soit  $f : U \longrightarrow K$  une application holomorphe, où  $K$  est un compact de  $U$ . Alors  $f$  admet un point fixe unique.

Enfin, signalons un résultat de P. Mazet et J.-P. Vigué [5] (voir aussi [7]) obtenu en utilisant les résultats précédents : l'ensemble des points fixes d'une application holomorphe  $f : X \longrightarrow X$ , où  $X$  est un domaine borné de  $\mathbb{C}^n$ , est une sous-variété analytique complexe de  $X$ .

Nous allons maintenant montrer deux résultats sur cette question, un obtenu en utilisant la distance intégrée de Carathéodory, l'autre en utilisant la distance de Kobayashi. Pour commencer, nous allons rappeler quelques propriétés des distances invariantes.

[Je remercie Jean-Jacques Loeb pour toutes les discussions que nous avons eues sur cette question.]

## 2. RAPPEL SUR LES DISTANCES ET MÉTRIQUES INVARIANTES

Soit  $X$  une variété analytique complexe. On définit la pseudométrie infinitésimale de Carathéodory (ou de Reiffen-Carathéodory) de la façon suivante :  $\forall x \in X, \forall v \in T_x X$ ,

$$E_X(x, v) = \sup |\varphi'(x).v|,$$

où  $\varphi$  parcourt l'ensemble des applications holomorphes de  $X$  dans le disque-unité  $\Delta$ . On vérifie facilement que  $E_X$  est une pseudométrie invariante dans le sens suivant : si  $f : X \longrightarrow X'$  est une application holomorphe, on a,  $\forall x \in X, \forall v \in T_x X$ ,

$$E_{X'}(f(x), f'(x).v) \leq E_X(x, v).$$

En particulier, les isomorphismes analytiques sont des isométries.

De manière duale, on définit la pseudométrie infinitésimale de Kobayashi (ou de Royden-Kobayashi):  $\forall x \in X, \forall v \in T_x X$ ,

$$F_X(x, v) = \inf_{\varphi \in H(\Delta, X), \varphi(0)=x} \{|\lambda| \text{ tel que } \lambda \varphi'(0) = v\}.$$

On vérifie que  $F_X$  est elle aussi une pseudométrie invariante.

Etant donnée une pseudométrie invariante sur une variété  $X$ , on peut définir par intégration la longueur d'un chemin de classe  $C^1$  par

morceaux. Ensuite, on définit une pseudodistance intégrée. La pseudodistance de deux points  $a$  et  $b$  est définie comme la borne inférieure de la longueur des chemins d'origine  $a$  et d'extrémité  $b$  (voir [4]). C'est, en un sens facile à préciser, une pseudodistance invariante. Par cette technique, en partant de la pseudométrie infinitésimale de Carathéodory, on définit la pseudodistance intégrée de Carathéodory  $c_X^i$  ; en partant de la pseudométrie infinitésimale de Kobayashi, on définit la pseudodistance de Kobayashi  $k_X$ . Par exemple, dans le cas du disque-unité  $\Delta$  dans  $\mathbb{C}$ , on obtient

$$c_\Delta^i(z, w) = k_\Delta(z, w) = \omega(z, w) = \tanh^{-1} \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right|,$$

où  $\omega$  est la distance de Poincaré.

Enfin, on définit la pseudodistance de Carathéodory  $c_X$  sur une variété  $X$  de la façon suivante : pour tous  $a$  et  $b$  dans  $X$ ,

$$c_X(a, b) = \sup_{\varphi \in H(X, \Delta)} \omega(\varphi(a), \varphi(b)),$$

où  $H(X, \Delta)$  désigne l'ensemble des applications holomorphes de  $X$  dans le disque-unité  $\Delta$ . Bien sûr,  $c_X$  est une pseudodistance invariante.

Pour une description plus détaillée des pseudométries et pseudodistances invariantes, voir le livre de S. Kobayashi [4].

### 3. UTILISATION DE LA DISTANCE INTÉGRÉE DE CARATHÉODORY

Soit  $X$  une variété analytique complexe et soit  $c_X^i$  la pseudodistance de Carathéodory sur  $X$ . On dit que  $X$  est  $c_X^i$ -hyperbolique si  $c_X^i$  est une distance sur  $X$ . Si  $c_X^i$  est une distance, on déduit du fait que c'est une distance intégrée et d'un résultat classique qu'elle définit la topologie de  $X$ . Nous avons le théorème suivant.

**Théorème 1.** *Soit  $X$  une variété analytique complexe  $c_X^i$ -hyperbolique et soit  $U \subset X$  un domaine relativement compact dans  $X$ . Alors, il existe une constante  $k < 1$  telle que,  $\forall a \in X, \forall v \in T_a X$ , on ait*

$$E_X(a, v) \leq k E_U(a, v).$$

*Plus précisément,  $k = \tanh M$ , où  $M$  est le diamètre de  $U$  pour la pseudodistance de Carathéodory.*

*Par intégration, on en déduit que, pour tous  $a$  et  $b$  appartenant à  $U$ ,*

$$c_X^i(a, b) \leq k c_U^i(a, b)$$

*Démonstration.* Soit  $c_X$  la pseudodistance de Carathéodory sur  $X$ . Comme  $\bar{U}$  est compact, le diamètre de  $U$  pour la pseudodistance de

Carathéodory qui, par définition, vaut  $\sup_{x \in \overline{U}, y \in \overline{U}} c_X(x, y)$  est une constante  $M < +\infty$ , et

$$M = \sup_{f \in H(X, \Delta), f(x)=0} \omega(0, f(y)) = \sup_{f \in H(X, \Delta), f(x)=0} \tanh^{-1} \left| f(y) \right|.$$

On en déduit immédiatement que, si on pose  $k = \tanh M$ , on a :  $k < 1$  et,  $\forall a \in X, \forall f \in H(X, \Delta)$ , tel que  $f(a) = 0$ , on a :  $\|f\|_{\overline{U}} \leq k < 1$ .

Etant donnée une fonction holomorphe  $f : X \longrightarrow \Delta$  telle que  $f(a) = 0$ , on définit une fonction  $\varphi : U \longrightarrow \Delta$  par la formule

$$\varphi(z) = (1/k)f(z).$$

Il est clair que  $\varphi$  envoie  $U$  dans  $\Delta$ , et on a :

$$\left| \varphi'(z).v \right| = (1/k) \left| f'(z).v \right|.$$

En prenant la borne supérieure, pour toutes les fonctions holomorphes  $f : X \longrightarrow \Delta$ , on en déduit que

$$E_U(a, v) \geq (1/k)E_X(a, v),$$

ce qui donne

$$E_X(a, v) \leq kE_U(a, v),$$

ce qui est le résultat annoncé. Par intégration, on en déduit que, pour tout  $a \in U$ , pour tout  $b \in U$ ,  $c_X^i(a, b) \leq kc_U^i(a, b)$ .

Comme application, nous avons le théorème suivant.

**Théorème 2.** *Soit  $X$  une variété  $c_X^i$ -hyperbolique et soit  $f : X \longrightarrow X$  une application holomorphe telle que  $f(X)$  soit relativement compact dans  $X$ . Alors la suite des itérées  $f^n$  converge, pour la topologie compacte ouverte vers une application constante  $z \mapsto c$ , où  $c$  est l'unique point fixe de  $f$ .*

(En particulier, l'hypothèse que  $X$  est  $c_X^i$ -hyperbolique est vérifiée si on suppose que la pseudodistance de Carathéodory  $c_X$  sur  $X$  est une distance sur  $X$ .)

*Démonstration.* On déduit facilement du fait que  $f(X)$  est relativement compact dans  $X$  qu'il existe un ouvert  $U$  relativement compact dans  $X$  tel que  $f(X) \subset U \subset X$ . Comme  $f$  envoie  $X$  dans  $U$ , on a, pour tout  $a \in X$ , pour tout  $v \in T_a(X)$ ,

$$E_U(f(a), f'(a).v) \leq E_X(a, v).$$

D'après le théorème 1, il existe une constante  $k < 1$  telle que

$$E_X(f(a), f'(a).v) \leq kE_U(f(a), f'(a).v).$$

On trouve alors

$$E_X(f(a), f'(a).v) \leq kE_X(a, v).$$

Par intégration, on en déduit que, pour tout  $a \in X$ , pour tout  $b \in X$ ,

$$c_X^i(f(a), f(b)) \leq kc_X^i(a, b).$$

En utilisant ce résultat pour  $b = f(a)$ , et en itérant, on en déduit que, pour tout  $n > 0$ ,

$$c_X^i(f^n(a), f^{n+1}(a)) \leq k^n c_X^i(a, f(a)).$$

De façon tout à fait classique, on en déduit que, pour tout  $a \in X$ , la suite des itérées  $(f^n(a))$  est une suite de Cauchy pour  $c_X^i$  sur  $\overline{f(X)}$  qui est compact. Elle converge donc vers  $c$  qui est l'unique point fixe de  $f$ .

Maintenant, soit  $K$  un compact de  $X$ . On a :

$$\sup_{z \in K} c_X^i(z, f(z)) = M < +\infty.$$

Pour  $n \geq p$ , on a pour tout  $z \in K$ ,

$$c_X^i(f^n(z), f^p(z)) \leq k^{p-1}/(1-k)M,$$

ce qui montre la convergence uniforme sur  $K$  de la suite  $(f^n(z))$  vers  $c$ . Ainsi, la suite  $(f^n(z))$  converge vers la fonction constante égale à  $c$  pour la topologie compacte ouverte.

Nous avons aussi le corollaire suivant.

**Corollaire 1.** *Soit  $A$  une variété de Stein, et soit  $X \subset A$  un domaine relativement compact dans  $A$ . Soit  $U$  un ouvert de  $X$  relativement compact dans  $X$  et soit  $f : X \longrightarrow U$  une application holomorphe. Alors  $f$  admet un point fixe unique  $c \in U$  et la suite des itérées  $(f^n)$  converge vers  $c$  pour la topologie compacte ouverte.*

*Démonstration.* D'après l'hypothèse, les fonctions holomorphes sur  $A$  séparent les points de  $X$ . Comme  $\overline{X}$  est compact, ces fonctions sont bornées sur  $X$ . Par suite,  $X$  est  $c_X$ -hyperbolique et  $c_X^i$ -hyperbolique, et on peut appliquer le théorème 2.

Remarquons que l'on peut aussi appliquer ce résultat pour des variétés qui ne sont pas hyperboliques pour la pseudodistance intégrée de Carathéodory. Plus précisément, nous avons le corollaire suivant.

**Corollaire 2.** *Soit  $A$  une variété de Stein, et soit  $X \subset A$  un domaine. Soit  $U$  un ouvert de  $X$  relativement compact dans  $X$  et soit  $f : X \longrightarrow U$  une application holomorphe. Alors  $f$  admet un point fixe unique  $c \in U$  et la suite des itérées  $(f^n)$  converge vers  $c$  pour la topologie compacte ouverte.*

Par un raisonnement classique de compacité, on construit un ouvert  $U'$  relativement compact dans  $X$  tel que  $U$  soit relativement compact dans  $U'$ . On remarque alors que, comme  $A$  est une variété de Stein, les fonctions holomorphes sur  $A$  séparent les points de  $U'$ , et comme  $U'$  est relativement compact dans  $X$ , les restriction à  $U'$  des fonctions holomorphes sur  $A$  sont bornées sur  $U'$ , ce qui entraîne que  $U'$  est hyperbolique pour la distance de Carathéodory. D'après le théorème 2,  $f$  admet un point fixe unique  $c \in U$ .

Le fait que la suite  $(f^n)$  converge vers  $c$  pour la topologie compacte ouverte se montre de la façon suivante : soit  $K$  un compact contenu dans  $X$ . Quitte à changer  $U'$ , on peut supposer que  $U'$  contient  $\overline{U}$  et  $K$ . Il suffit alors d'appliquer le théorème 2.

Pour terminer ce paragraphe, remarquons que le théorème que nous venons de démontrer permet de retrouver le résultat de M. Hervé [3]. En effet,  $\mathbb{C}^n$  est une variété de Stein et on peut appliquer le corollaire précédent.

#### 4. UTILISATION DE LA DISTANCE DE KOBAYASHI

On peut se demander si on peut généraliser le théorème 1 en remplaçant la métrique infinitésimale de Carathéodory par la métrique infinitésimale de Kobayashi. Rappelons qu'une variété complexe  $X$  est hyperbolique si la pseudodistance de Kobayashi  $k_X$  est une distance sur  $X$ . La première remarque est qu'il existe des variétés hyperboliques compactes. Dans ce cas, si on considère  $U = X \subset X$ , on ne peut pas espérer obtenir une inégalité stricte entre  $F_U(a, v)$  et  $F_X(a, v)$ . Pour obtenir un résultat de ce genre, il faut faire des hypothèses supplémentaires sur les variétés considérées (afin d'éliminer le cas compact). Plus précisément, nous avons le théorème suivant.

**Théorème 3.** *Soit  $A$  une variété de Stein de dimension  $n$ . Soit  $X \subset A$  un domaine hyperbolique et soit  $U$  un ouvert de  $X$  relativement compact dans  $X$ . Alors, il existe une constante  $k < 1$  telle que, pour tout  $a \in U$ , pour tout  $v \in T_a U$ , on ait*

$$F_X(a, v) \leq k F_U(a, v).$$

*De même, pour tout  $a \in U$ , pour tout  $b \in U$ , on a*

$$k_X(a, b) \leq k k_U(a, b).$$

*Démonstration.* D'après la théorie des variétés de Stein, il existe un plongement fermé  $i$  de  $A$  sur une variété fermée  $i(A)$  de  $\mathbb{C}^{2n+1}$ .

On déduit alors du fait que  $i(U)$  est relativement compact dans  $\mathbb{C}^{2n+1}$  qu'il existe  $R > 0$  tel que,  $\forall x \in i(U)$ ,  $i(U) \subset B(x, R)$ , où  $B(x, R)$  est la boule de centre  $x$  et de rayon  $R$  pour une norme quelconque sur  $\mathbb{C}^{2n+1}$ .

D'après R. Gunning et H. Rossi [2], chapitre VIII, section C, théorème 8, il existe un voisinage  $W$  de  $i(A)$  et une rétraction holomorphe  $\rho$  de  $W$  sur  $i(A)$ . D'autre part, quitte à diminuer la taille de  $W$ , on peut supposer qu'il existe  $r > 0$  tel que

$$\forall x \in i(U), B(x, r) \subset W,$$

$$\forall x \in i(U), \rho(B(x, r)) \subset i(X).$$

Soit maintenant  $\varphi : \Delta \longrightarrow i(U)$  une application holomorphe telle que  $\varphi(0) = a$ . On peut alors définir une application holomorphe  $\psi : \Delta \longrightarrow i(X)$  par la formule

$$\psi(\zeta) = \rho((1 + r/R)(\varphi(\zeta) - \varphi(0)) + \varphi(0)).$$

Il faut d'abord vérifier que  $\psi$  est bien définie. Pour cela, on écrit

$$(1 + r/R)(\varphi(\zeta) - \varphi(0)) + \varphi(0) = \varphi(\zeta) + r/R(\varphi(\zeta) - \varphi(0)).$$

Or,  $\varphi(\zeta) \in i(U)$ ,  $\|\varphi(\zeta) - \varphi(0)\| < R$ ,  $\|r/R(\varphi(\zeta) - \varphi(0))\| < r$ , et  $W$  contient la boule de centre  $\varphi(\zeta)$  et de rayon  $r$ . Par suite,  $(1 + r/R)(\varphi(\zeta) - \varphi(0)) + \varphi(0) \in W$ , et son image par  $\rho$  est contenue dans  $i(X)$ .

D'autre part, il est clair que  $\psi(0) = a$  et  $\psi'(0) = (1 + r/R)\varphi'(0)$ . Ceci suffit à démontrer que

$$F_X(a, v) \leq 1/(1 + r/R)F_U(a, v).$$

Par intégration, on en déduit la même inégalité sur la distance de Kobayashi.

Par les mêmes méthodes que dans la section 3, on montre un théorème sur les points fixes d'applications holomorphes.

**Théorème 4.** *Soit  $A$  une variété de Stein. Soit  $X \subset A$  un domaine hyperbolique et soit  $f : X \longrightarrow X$  une application holomorphe telle que  $f(X)$  soit relativement compact dans  $X$ . Alors la suite des itérées  $f^n$  converge, pour la topologie compacte ouverte vers une application constante  $z \mapsto c$ , où  $c$  est l'unique point fixe de  $f$ .*

A partir de ces considérations, on peut donner une nouvelle démonstration du corollaire 2 qui utilise la métrique infinitésimale de Kobayashi. Le résultat obtenu est, il semble, tout à fait semblable à celui du corollaire 2.

## REFERENCES

- [1] Earle, C. and Hamilton, R., A fixed point theorem for holomorphic mappings. 1970 Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XVI, Berkeley, Calif., (1968) pp. 61–65 Amer. Math. Soc., Providence, R.I.
- [2] Gunning, R. and Rossi, H., Analytic functions of several complex variables. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. 1965 xiv+317 pp.

- [3] Hervé, M., Several complex variables. Local theory. Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay by Oxford University Press, London 1963 vii+134 pp.
- [4] Kobayashi, S., Hyperbolic manifolds and holomorphic mappings. An introduction. Second edition. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2005. xii+148 pp. ISBN: 981-256-496-9
- [5] Mazet, P. and Vigué, J-P., Convexité de la distance de Carathéodory et points fixes d'applications holomorphes. Bull. Sci. Math. 116 (1992), no. 3, 285–305.
- [6] Reiffen, H., Die Carathéodorysche Distanz und ihre zugehörige Differentialmetrik. Math. Ann. 161 (1965) 315–324.
- [7] Vigué, J-P., Points fixes d'applications holomorphes d'un domaine borné de  $\mathbb{C}^n$  dans lui-même. arXiv:1004.1506, à paraître.

LMA, Université de Poitiers, CNRS, Mathématiques, SP2MI, BP 30179, 86962 FUTUROSCOPE.

e-mail : [vigue@math.univ-poitiers.fr](mailto:vigue@math.univ-poitiers.fr) ou [jp.vigue@orange.fr](mailto:jp.vigue@orange.fr)